Algebra MN1

Anteckningar från föreläsningar

Fördjupningsspåret Uppsala Universitet

Hösten 2002

Innehåll

Den text som här föreligger är mina anteckningar gjorda under föreläsningar i en förstaterminskurs i Algebra på Uppsala universitet hösten 2002. Denna speciella förstaterminskurs i algebra gavs för de som följde det s.k. fördjupningsspåret som innebar mera fördjupade studier i matematik redan under första årets grundkurser. Detta gör att kursen är större än den kurs som normalt ges under namnet Algebra MN1 på Uppsala universitet. Föreläsare i Algebra var lektor Karl-Heinz Fieseler, och tilläggsmaterial utdelat under kursen finns på hemsidan http://www.math.uu.se/∼khf

Fullständiga anteckningar finns på hemsidan
`http://home.student.uu.se/d/dala2691/math/`
i Word-format i väntan på konvertering till PDF-format.

David Larsson
Norderön den 28 december 2003

Kapitel 1

Grundläggande begrepp

1.1 Naiv mängdlära

Definition 1.1.1 *En mängd är en sammanfattning av ett antal objekt som kallas för mängdens element Vanliga beteckningar anges i tabellen nedan.*

Objekt	**Mängder**
x, y, z	M, N, A, B
Reella tal	$\mathbb{R} = \{allareellatal\}$
Heltal	$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2 \ldots\}$
Naturliga tal	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
Rationella tal	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
Punkter i planet	

Anmärkning 1.1.2 $x \in M$ *betyder att* x *tillhör* M*.*

Definition 1.1.3 *Två mängder* A, B *är lika, skrivs* $A = B$*, omm* A *och* B *innehåller samma element, dvs.* $\forall x; x \in A \Rightarrow x \in B$

$\forall$	För alla
$\Leftrightarrow$	omm (ekvivalens)
$\exists$	det finns
$\Rightarrow$	innebär, implicerar
$\wedge$	och
$\vee$	eller (inte uteslutande)

Definition 1.1.4 *Låt* A *och* B *vara mängder.* A *kallas en delmängd till* B*, skrivs som* $A \subset B$ *, omm alla element i* A *tillhör* B*, dvs.* $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$

Exempel Mängder och mängdoperatorer:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. Venndiagram:

3. $A = B \Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

4. Att namnge mängdens element:
   $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$
   $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = -1\} = \emptyset$

Anmärkning 1.1.5 *Det finns en och endast en mängd som inte innehåller något element, $\emptyset$ (den tomma mängden).*

Exempel $A = \emptyset = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x^2 = -2\}$
Vi noterar att $\emptyset \subset B$ gäller för alla mängder B ty $\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in B$

Definition 1.1.6 *Vi definierar följande mängdoperationer på två mängder A och B:*

1. $A \cap B = \{x \ ; \ x \in A \wedge x \in B\}$, *snittet*

2. $A \cup B = \{x \ ; \ x \in A \vee x \in B\}$, *unionen*

Sats 1.1.7 *Låt A, B, C vara mängder. Sedan gäller*

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Bevis 1) Visa $VL \in HL$ och $HL \in VL$:
Låt $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C))$
2) visas på samma sätt.

Definition 1.1.8 *Ytterligare mängdoperationer. För två mängder A och B definieras*

1. $A \setminus B = \{x \in A \ ; \ x \notin B\}$, *differens*

2. $\bar{A} = \{x \ ; \ x \notin A\}$, *komplement (För $A \subset X$, X en stor mängd, definieras komplementet $A = X \setminus A$)*

3. $A \times B = \{(a, b) \ ; \ a \in A, b \in B\}$ *((a, b) är ett ordnat par)*

Anmärkning 1.1.9 *Följande regler gäller för element i den kartesiska produkten:*
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
$(a, b) \neq (b, a) \Leftrightarrow a \neq b$

Anmärkning 1.1.10 *Mängder kan tillåtas som element i mängder.*

Exempel $A = \{\{2, 3\}, \{3, 5\}, 5\}$

Definition 1.1.11 *Om A är en godtycklig mängd så kallas $\mathcal{P}(A) = \{B \ ; \ B \subset A\}$ för A:s potensmängd*

Exempel Några potensmängder:
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\{\emptyset\}\}$,
$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\{1\}\}$,
$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Notation 1.1.12 *A är en mängd med ändligt antal element. Dåskrivs antal element i A som $|A|$.*

Anmärkning 1.1.13 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Den Russelska antinomin Låt $A = \{B \text{ mängd} \ ; \ B \notin B\}$. Ta sedan t.ex. allmängden som kan definieras genom $C = \{B \ ; \ B \text{ är en mängd}\} \Rightarrow C \in C$. Då får vi följande motsägelser:
$A \in A \Rightarrow A \notin A$
$A \notin A \Rightarrow A \in A$

Von Neumanns universum Idé: Bygg upp en mindre mängd universum, där alla mängd-operatorer är tillåtna:
$V_0 = \emptyset$
$V_1 = \mathcal{P}(\emptyset)$
$V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$
Detta kallas för von Neumanns universum.

1.2 Avbildningar och funktioner

Definition 1.2.1 *En avbildning (funktion)* $f : A \to B$ *från en mängd* A *till en mängd* B *som tillordnar varje element* $a \in A$ *precis ett element* $b \in B$ *så att* $b = f(a)$. A *kallas för definitionsmängden till* f. B *kallas för målmängden till* f.

Exempel Några exempel på avbildningar:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & om\ x < 0 \\ 1 & om\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & om\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & om\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Anmärkning 1.2.2 *Varje funktion* $f : A \to B$ *kan tillordnas en graf*
$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\} \subset A \times B$

Definition 1.2.3 *En avbildning* $f : A \to B$ *är en delmängd* $f \subset A \times B$ *, sådan att* $\forall x \in A \ \ \exists!\, y \in B : (x, y) \in f$ *, där* $\exists!$ *betyder "det finns precis ett". Då skrivs* $y = f(x)$.

Definition 1.2.4 *En avbildning* $f : A \to B$ *kallas*

- *injektiv omm* $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$*, dvs. två olika element i definitionsmängden kan inte avbildas på samma element i målmängden. En omformulering är att* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- *surjektiv omm* $\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ : \ y = f(x)$*, dvs. varje element i målmängden är en bild av ett element i definitionsmängden.*
- *bijektiv omm* f *är både injektiv och surjektiv, s.k. en-entydig (one to one). Alltså:* $\forall y \in B \ \ \exists!\, x \in A \ : \ y = f(x)$

Exempel Avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ är varken injektiv eller surjektiv: $f(-1) = f(1) = 1$ och $\nexists x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 0$

Logik
$P(x) \Rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$
$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$
$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$

Exempel : $f : A \to B$ är inte surjektiv omm $\exists y \in B \ \forall A : y \neq f(x)$. Detta kan härledas på följande sätt:
$\neg(\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ : \ y = f(x)) \Leftrightarrow \exists y \in B \ : \ \neg(\exists x \in A \ : \ y = f(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y \in B \ \forall x \in A \ : \ \neg(y = f(x)) \Leftrightarrow \exists y \in B \ \forall x \in A \ : \ y \neq f(x)$

Exempel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^3$ är bijektiv.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ är surjektiv men inte injektiv ty $f(0) = f(-1) = f(1) = 0$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2^x$ är injektiv men inte surjektiv.

Definition 1.2.5 *För avbildningen $f : A \to B$ och $x \in A, y \in B$ kallas y bilden (bildpunkten) till x och x kallas en inversbild till y.*

Definition 1.2.6 *Låt $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ och $f : A \to B$ vara en avbildning. Sedan kallas mängden $f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}$ bilden (bildmängden) av $A_0 \subset A$ m.a.p. f. Den inversa bilden definieras som $f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$.*

Exempel För funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ sätter vi $A_0 = [0, \infty[= B_0$ och får då
$f(A_0) = [c, \infty[$
$f^{-1}(B_0) = [-1, 0] \cup [1, \infty[$
där $c \approx 0.38$ är det minsta värde som f antar i intervallet.

Sats 1.2.7 *Följande räkneregler gäller för avbildningar $f : A \to B$ där $A_0, A_1 \subset A$ och $B_0, B_1 \subset B$:*
$f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$
$f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$
$f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$
$f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$
$f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$
$f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$

Definition 1.2.8 *Om $B_0 = \{y\}$ så kallas $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}$ fibern av f ovanför y.*

Definition 1.2.9 *Om $A_0 \subset A$ och $f : A \to B$ är en avbildning så kallas$f_{|A}$ restriktionen av f till*

Exempel Avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)$ är inte injektiv men $f_{|[1,\infty[}$ är det.

Definition 1.2.10 *Avbildningen $id_A : A \to A, id(x) = x$ kallas den identiska avbildningen påA, eller identiteten på A.*

Definition 1.2.11 *Om $f : A \to B$ är bijektiv sådefinieras $f^{-1} : B \to A$ genom $f^{-1}(y) = x$ om $y = f(x)$. f^{-1} kallas den inversa avbildningen. f^{-1} existerar bara om f är bijektiv.*

Definition 1.2.12 *Om $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ är en avbildning så definieras sammansättningen, kompositionen, av f och g som $g \circ f : A \to C,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Anmärkning 1.2.13 *För $f : A \to B$ gäller $f^{-1} \circ f = id_A$ och $f \circ f^{-1} = id_B$*

Sats 1.2.14 *För $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gäller $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, dvs. $\circ$ är associativ.*

Anmärkning 1.2.15 *$f, g : A \to A \not\Rightarrow f \circ g = g \circ f$.*

Definition 1.2.16 *Om A och B är mängder definieras uttrycket*
$B^A = \{f : A \to B \text{ avbildning}\}$